Ouv 2	Théorème Central Limite	L 218 L263 L 250 L 260 L 261 L 262

Lemme 1 : Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $z_n \to z \in \mathbb{C}$,

alors $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{z}$.

Démonstration : On a $\forall Z \in D(1,1)$, $e^{\log(Z)} = Z$.

(z_n) converge donc elle est bornée ainsi $\frac{z_n}{n} \to 0$,

d'où $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $1+\frac{z_n}{n} \in D(1,1)$

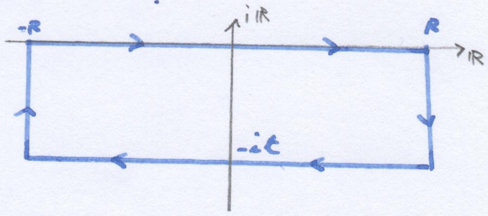
alors $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{\log\left(1+\frac{z_n}{n}\right)\cdot n} = e^{n\left(\frac{z_n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{z_n+o(1)}$

ainsi, par continuité de exp, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{z}$.

Lemme 2 : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Démonstration : On considère $f : z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

et $\forall R>0, \forall t \in \mathbb{R}$, le chemin $\mathcal{C}_1^{mx}$ γ^* défini par :



$$\int_{\gamma^*} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx - \int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}(R+ix)^2}\cdot -i\,dx + \int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(-R+ix)^2}\cdot i\,dx$$

D'après le th de Cauchy, $\int_{\gamma^*} f(z)\,dz = 0$;

Par CVM, $\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

et $\forall R>0$, $\left|\int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}(R+ix)^2}\cdot -i\,dx\right| \leqslant \int_0^{|t|} e^{\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2}(R+ix)^2\right)}dx = \int_0^{|t|} e^{-\frac{1}{2}(R^2-x^2)}dx$

$$= e^{-\frac{R^2}{2}}\cdot \int_0^{|t|} e^{\frac{1}{2}x^2}dx = o(1)$$

De même, $\int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(-R+ix)^2} i\,dx = o(1)$

Finalement, $\int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx = 0 + \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + o(1)$.

D'où $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx = \sqrt{2\pi}$.

Ainsi, $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Théorème limite central : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, iid.

Si $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_n) > 0$, alors $Z_n = \sqrt{n}\cdot\dfrac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration : D'après le th de Lévy, mq $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

On a $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\cdot\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k))$

on pose $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k)$

alors
$$\varphi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itZ_n}) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{k=1}^{n} Y_k}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}Y_k}\right)$$
$$\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}Y_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{Y_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

Or X_1 admet un moment d'ordre 2, donc Y_1 aussi, donc φ_{Y_1} est de classe $\mathcal{C}^2$ (par dérivation sous le signe $\int$).

Ainsi, d'après Taylor-Young,

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) = \varphi_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\varphi'_{Y_1}(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^2\varphi''_{Y_1}(0) + o(t^2)$$

d'où
$$\left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n = \left(1 + 0 + \frac{t^2}{2n\sigma^2}\cdot -\sigma^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + o(1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_Z(t)$$